Klausur - Mantelbogen

FFH • FERN-FACHHOCHSCHULE • HAMBURG

STAATLICH ANERKANNTE FACHHOCHSCHULE

Name, Vorname	
Matrikel-Nr.	
Studienzentrum	
Studiengang	**Wirtschaftsingenieurwesen**
Fach	**Wirtschaftsmathematik**
Art der Leistung	**Studienleistung**
Klausur-Knz.	**WI-WMT-S12–020504**
Datum	**04.05.2002**

Ausgegebene Arbeitsblätter _______

Ort, Datum

Aufsichtsführende(r)

Abgegebene Arbeitsblätter _______

Ort, Datum

Prüfungskandidat(in)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
max. Punktezahl	9	16	8	13	16	10	14	14	100
erreichte Punktezahl									
2. Prüfer									

Gesamtpunktzahl	
bestanden / nicht bestanden	

Datum, 1. Prüfer

Datum, 2. Prüfer

Anmerkungen des Erstprüfers:

Datum, 1. Prüfer

Anmerkungen des Zweitprüfers:

Datum, 2. Prüfer

Klausur - Aufgaben

FFH · FERN-FACHHOCHSCHULE HAMBURG
STAATLICH ANERKANNTE FACHHOCHSCHULE

Studiengang	**Wirtschaftsingenieurwesen**
Fach	**Wirtschaftsmathematik**
Art der Leistung	**Studienleistung**
Klausur-Knz.	**WI-WMT-S12–020504**
Datum	**04.05.2002**

Bezüglich der Anfertigung Ihrer Arbeit sind folgende Hinweise verbindlich:

- Verwenden Sie ausschließlich das vom Aufsichtsführenden **zur Verfügung gestellte Papier**, und geben Sie sämtliches Papier (Lösungen, Schmierzettel und nicht gebrauchte Blätter) zum Schluss der Klausur wieder bei Ihrem Aufsichtsführenden ab. Eine nicht vollständig abgegebene Klausur gilt als nicht bestanden.
- Beschriften Sie jeden Bogen mit Ihrem **Namen und Ihrer Immatrikulationsnummer**. Lassen Sie bitte auf jeder Seite 1/3 ihrer Breite als Rand für Korrekturen frei, und nummerieren Sie die Seiten fortlaufend. Notieren Sie bei jeder Ihrer Antworten, auf welche Aufgabe bzw. Teilaufgabe sich diese bezieht.
- Die Lösungen und Lösungswege sind in einer für den Korrektanten **zweifelsfrei lesbaren Schrift** abzufassen. Korrekturen und Streichungen sind eindeutig vorzunehmen. Unleserliches wird nicht bewertet.
- Bei numerisch zu lösenden Aufgaben ist außer der Lösung stets der **Lösungsweg anzugeben**, aus dem eindeutig hervorzugehen hat, wie die Lösung zustande gekommen ist.
- Zur Prüfung sind bis auf Schreib- und Zeichenutensilien ausschließlich die nachstehend genannten Hilfsmittel zugelassen. Werden **andere als die hier angegebenen Hilfsmittel verwendet oder Täuschungsversuche** festgestellt, gilt die Prüfung als nicht bestanden und wird mit der Note 5 bewertet.

Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Anzahl Aufgaben:	- 8 -
Höchstpunktzahl:	- 100 -

Hilfsmittel :
FFH-Taschenrechner
Formelsammlung Wirtschaftsmathematik

Vorläufiges Bewertungsschema:

Punktzahl		Ergebnis
von	bis einschl.	
50	100	**bestanden**
0	49,5	**nicht** bestanden

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 — 9 Punkte

Mittels *n* Speicherzellen lassen sich in einem Computer 2^n verschiedene Zeichen darstellen.

Wie viele Speicherzellen braucht man, um die Buchstaben unseres Alphabets (einschließlich der Umlaute ä, ö ,ü) in Groß- und Kleinschrift sowie die Dezimalziffern darzustellen?

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*
r	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*	*ä*	*ö*	*ü*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
F	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*
W	*X*	*Y*	*Z*	*Ä*	*Ö*	*Ü*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Aufgabe 2 — 16 Punkte

Glasfasern entstehen durch Ziehen eines heißen Glasstabes. Zur Herstellung einer Faser mit einem Durchmesser von 0,1 mm stehen verschieden lange zylindrische Glasstäbe der Dicke 30 mm zur Verfügung.

a) Geben Sie die Faserlänge L_F als Funktion der Stablänge L_S des ursprünglichen Glasstabs an. **8 Pkte**

b) Wie ändert sich die Faserlänge, wenn die Stablänge verdoppelt wird? **4 Pkte**

c) Wie ändert sich die Faserlänge, wenn die Stabdicke verdoppelt wird? **4 Pkte**

Hinweis:

Das Volumen eines Zylinders mit dem Durchmesser *d* und der Höhe *h* berechnet sich nach der Formel $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$.

Aufgabe 3 — 8 Punkte

Von der quadratischen Gleichung $2x^2 - 6x - 108 = 0$ ist eine Lösung $x_1 = -6$ bekannt.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von VIETA die zweite Lösung.

Aufgabe 4 — 13 Punkte

Berechnen Sie die zweite Ableitung der Funktion $f(x) = (x^2 - 3)^{-1}$.

Aufgabe 5 — 16 Punkte

Die Nullstelle folgender Gleichung soll mit dem NEWTON-Verfahren berechnet werden:

$$\sqrt{x} + x^2 - x - 2 = 0$$

a) Wählen Sie als Startwert $x_0 = 1{,}5$ und weisen Sie dessen Eignung mit der entsprechenden Formel nach. **8 Pkte**

b) Berechnen Sie die Nullstelle auf vier Nachkommastellen genau. **8 Pkte**

Aufgabe 6 — 10 Punkte

Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4}$ begrenzt mit den Koordinatenachsen x und y und der Geraden $x = 6$ im I. Quadranten eine Fläche A.

Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn diese Fläche A um die x-Achse rotiert.

Aufgabe 7 — 14 Punkte

Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 \frac{x^2 - 2x}{2x + 1}\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Substitution $t = 2x + 1$ und der Umrechnung (Transformation) der Integrationsgrenzen.

Aufgabe 8 — 14 Punkte

Zur Markteinführung eines Produkts werden folgende Funktionen angenommen:

Preis-Absatzfunktion: $p(x) = 2x - 15$

Gesamtkostenfunktion: $K(x) = x^2 + 110x - 3150$

Berechnen Sie für das Produkt die

a) Umsatzfunktion **4 Pkte**

b) Gewinnfunktion **4 Pkte**

c) Gewinnschwellen. **6 Pkte**

Korrekturrichtlinie zur Studienleistung
Wirtschaftsmathematik am 04.05.2002
Wirtschaftsingenieurwesen
WI-WMT-S12 – 020504

Für die Bewertung und Abgabe der Studienleistung sind folgende Hinweise verbindlich:

- Die Vergabe der Punkte nehmen Sie bitte so vor, wie in der Korrekturrichtlinie ausgewiesen. Eine summarische Angabe von Punkten für Aufgaben, die in der Korrekturrichtlinie detailliert bewertet worden sind, ist nicht gestattet.
- Nur dann, wenn die Punkte für eine Aufgabe nicht differenziert vorgegeben sind, ist ihre Aufschlüsselung auf die einzelnen Lösungsschritte Ihnen überlassen.
- Stoßen Sie bei Ihrer Korrektur auf einen anderen richtigen als den in der Korrekturrichtlinie angegebenen Lösungsweg, dann nehmen Sie bitte die Verteilung der Punkte sinngemäß zur Korrekturrichtlinie vor.
- Rechenfehler sollten grundsätzlich nur zur Abwertung des betreffenden Teilschrittes führen. Wurde mit einem falschen Zwischenergebnis richtig weitergerechnet, so erteilen Sie die hierfür vorgesehenen Punkte ohne weiteren Abzug.
- Ihre Korrekturhinweise und Punktbewertung nehmen Sie bitte in einer zweifelsfrei lesbaren Schrift vor.
- Die von Ihnen vergebenen Punkte und die daraus sich gemäß dem nachstehenden Notenschema ergebende Bewertung tragen Sie in den Klausur-Mantelbogen sowie in das Formular „Klausurergebnis“ (Ergebnisliste) ein.
- Gemäß der Diplomprüfungsordnung ist Ihrer Bewertung folgendes Bewertungsschema zugrunde zu legen:

Punktzahl		Ergebnis
von	bis einschl.	
50	100	**bestanden**
0	49,5	**nicht** bestanden

- Die korrigierten Arbeiten reichen Sie bitte spätestens bis zum

22. Mai 2002

in Ihrem Studienzentrum ein. Dies muss persönlich oder per Einschreiben erfolgen. Der angegebene Termin ist unbedingt einzuhalten. Sollte sich aus vorher nicht absehbaren Gründen ein Terminüberschreitung abzeichnen, so bitten wir Sie, dies unverzüglich Ihrem Studienzentrenleiter anzuzeigen.

Lösung 1 — vgl. SB 1; Kap. 2.3.8 — 9 Punkte

Es sind 58 Buchstaben und 10 Dezimalziffern darzustellen. (2 Pkte)

Die Bedingung hierfür lautet: $2^n = 68$ (4 Pkte)

Logarithmieren: $n \cdot \log 2 = \log 68$

Umformen: $n = \dfrac{\log 68}{\log 2} \approx 6{,}1$ (2 Pkte)

Da die Lösung eine natürliche Zahl sein muss, braucht man mindestens 7 Speicherzellen. (1 Pkt)

Lösung 2 — vgl. SB 4 — 16 Punkte

a) Faserlänge L_F als Funktion der Stablänge L_S : **8 Pkte**

Volumen Glasstab: $V_S = {d_S}^2 \dfrac{\pi}{4} \cdot L_S$ mit $d_S = 30$ mm (1 Pkt)

Volumen Glasfaser: $V_F = {d_F}^2 \dfrac{\pi}{4} \cdot L_F$ mit $d_F = 0{,}1$ mm (1 Pkt)

Aus der Volumenkonstanz $V_F = V_S$ folgt (2 Pkte)

$${d_F}^2 \frac{\pi}{4} \cdot L_F = {d_S}^2 \frac{\pi}{4} \cdot L_S \text{ und somit}$$

$$L_F = \left(\frac{d_S}{d_F}\right)^2 \cdot L_S . \qquad \text{(I)}$$ (2 Pkte)

Einsetzen von $d_S = 30$ mm und $d_F = 0{,}1$ mm liefert die Faserlänge als Funktion der Stablänge:

$$L_F = \left(\frac{30 \text{ mm}}{0{,}1 \text{ mm}}\right)^2 \cdot L_S = \underline{\underline{90.000 \cdot L_S}}$$ (2 Pkte)

b) Verdopplung der Stablänge: **4 Pkte**

Unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus Teilaufgabe a) mit $L_{S_2} = 2 \cdot L_S$ ergibt sich

$$L_{F_2} = 90.000 \cdot L_{S_2} = 2 \cdot 90.000 \cdot L_S = \underline{\underline{2 \cdot L_F}} .$$

Eine Verdopplung der Stablänge führt damit zur Verdoppelung der Faserlänge.

c) Verdopplung der Stabdicke: **4 Pkte**

Mit $d_{S_2} = 2 \cdot d_S$ und Gl. (I) ergibt sich

$$L_{F_2} = \left(\frac{d_{S_2}}{d_F}\right)^2 \cdot L_S = \left(\frac{2 \cdot d_S}{d_F}\right)^2 \cdot L_S = 4 \cdot \left(\frac{d_S}{d_F}\right)^2 \cdot L_S = \underline{\underline{4 \cdot L_F}}$$

Eine Verdopplung der Stabdicke führt damit zur Vervierfachung der Faserlänge.

Lösung 3 vgl. SB 1; Kap. 2.4.3 8 Punkte

Umstellen der quadratischen Gleichung $2x^2 - 6x - 108 = 0$ zur Normalform

$x^2 - 3x - 54 = 0$ mit den Koeffizienten $p = -3$ und $q = -54$. (4 Pkte)

Erste bekannte Lösung: $x_1 = -6$

Nach dem Satz von VIETA gilt: $x_1 + x_2 = -p$ (2 Pkte)

Einsetzen der ersten Lösung: $-6 + x_2 = 3$

Damit lautet die zweite Lösung: $\underline{\underline{x_2 = 9}}$ (2 Pkte)

Lösung 4 vgl. SB 5; Kap. 3.4 und 3.5 13 Punkte

Anwendung der Kettenregel:

$$f(x) = (x^2 - 3)^{-1} \; ; \; f'(x) = (-1) \cdot (x^2 - 3)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2-3)^2} = -2 \cdot \frac{g(x)}{h(x)}$$ (2 Pkte)

Anwendung der Quotientenregel: $f''(x) = -2 \cdot \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$ (1 Pkt)

Setze $g(x) = x$; $h(x) = (x^2 - 3)^2$ (2 Pkte)

Ableitungen: $g'(x) = 1$; $h'(x) = 2 \cdot (x^2 - 3) \cdot 2x = 4x \cdot (x^2 - 3)$ (2 Pkte)

Damit wird: $$f''(x) = -2 \cdot \frac{1 \cdot (x^2-3)^2 - x \cdot 4x \cdot (x^2 - 3)}{(x^2-3)^4} = -2 \cdot \frac{(x^2-3) - 4x^2}{(x^2-3)^3}$$ (2 Pkte)

$$\underline{\underline{= 6 \cdot \frac{x^2+1}{(x^2-3)^3}}}$$ (4 Pkte)

Lösung 5 vgl. SB 5; Kap. 4.6 16 Punkte

a) Eignung des Startwerts: **8 Pkte**

Für einen Startwert x_0 muß gelten: $\left| \dfrac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| < 1$ (I) (1 Pkt)

Funktion: $f(x) = \sqrt{x} + x^2 - x - 2$

Ableitungen: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2x - 1$; $f''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}} + 2$ (5 Pkte)

Einsetzen des Startwerts $x_0 = 1{,}5$ in die Funktion und ihre Ableitungen liefert:

$$f(1{,}5) = -0{,}02525\,;\ f'(1{,}5) = 2{,}40824\,;\ f''(1{,}5) = 1{,}86391$$

Einsetzen in (I) ergibt: $\left|\dfrac{-0{,}02525 \cdot 1{,}86391}{2{,}40824^2}\right| \approx 0{,}008 < 1$ (2 Pkte)

Damit ist der Nachweis der Eignung des Startwertes erbracht.

b) Anwendung des Newton-Verfahrens: **8 Pkte**

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$ (1 Pkt)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1{,}5 - \frac{-0{,}02525}{2{,}40824} = 1{,}51048$$ (3 Pkte)

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}51048 - \frac{8{,}56968 \cdot 10^{-5}}{2{,}42778} = 1{,}51044$$ (3 Pkte)

Da sich bei x_2 gegenüber x_1 die 4. Nachkommastelle nicht mehr ändert, ist die Aufgabe erfüllt und die Iteration kann abgebrochen werden. $x = 1{,}5104$ löst die Gleichung $\sqrt{x} + x^2 - x - 2 = 0$ auf vier Stellen genau. (1 Pkt)

Lösung 6 — vgl. SB 7; Kap. 5.2 — 10 Punkte

Das Volumen eines Rotationskörpers errechnet sich aus $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$.

Mit der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4}$ und den Integrationsgrenzen $a = 0$ und $b = 6$ ergibt sich (4 Pkte)

$$V = \pi \int_0^6 \left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^6 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = \text{p} \left[\frac{1}{12}x^3 + x\right]_0^6 = 24\pi \approx \underline{\underline{75{,}4}}$$ (6 Pkte)

Lösung 7 — vgl. SB 7; Kap. 3.4 und 4.3 — 14 Punkte

$$\int_0^2 \frac{x^2 - 2x}{2x+1} \, \mathrm{d}x$$

Substitution $t = 2x + 1$ liefert $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2$ und $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$. (2 Pkte)

Umrechnung der Integrationsgrenzen:

für $x = 0 \;\rightarrow\; t = 1$ (1 Pkt)

für $x = 2 \;\rightarrow\; t = 5$ (1 Pkt)

Setzt man noch $x = \frac{1}{2}(t-1)$, folgt für das Integral

$$\int_0^2 \frac{x(x-2)}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \int_1^5 \frac{\left[\frac{1}{2}(t-1)\right]\cdot\left[\frac{1}{2}(t-1)-2\right]}{t}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \int_1^5 \frac{\frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{5}{4}}{2t}\,\mathrm{d}t$$ (5 Pkte)

$$= \int_1^5 \left(\frac{1}{8}t - \frac{3}{4} + \frac{5}{8t}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{16}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{5}{8}\cdot\ln t\right]_1^5 = -1{,}182 - (-0{,}688) = \underline{\underline{-0{,}494}}$$ (5 Pkte)

Lösung 8 vgl. SB 4; Kap. 5 14 Punkte

a) Umsatzfunktion: **4 Pkte**

Die Umsatzfunktion $E(x)$ ergibt sich als das Produkt von Preis-Absatzfunktion $p(x)$ und abgesetzter Menge x:

$$E(x) = p(x)\cdot x$$ (2 Pkte)

$$= (2x-15)\cdot x$$

$$= \underline{\underline{2x^2 - 15x}}$$ (2 Pkte)

b) Gewinnfunktion: **4 Pkte**

Die Gewinnfunktion ergibt sich als Differenz von Umsatzfunktion und Gesamtkostenfunktion:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$ (2 Pkte)

$$= 2x^2 - 15x - \left(x^2 + 110x - 3150\right)$$

$$= \underline{\underline{x^2 - 125x + 3150}}$$ (2 Pkte)

c) Gewinnschwellen: **6 Pkte**

Die Gewinnschwellen erhält man als positive Nullstellen der Gewinnfunktion:

$$G(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 125x + 3150 = 0$$ (2 Pkte)

Diese lässt sich auch als Produkt schreiben: $(x-35)\cdot(x-90) = 0$.

Daraus ergeben sich die Nullstellen bzw. Gewinnschwellen: $\underline{\underline{x_1 = 35}}$; $\underline{\underline{x_2 = 90}}$ (4 Pkte)

Die Anwendung der (p,q)-Formel zur Lösung der quadratischen Gleichung mit $p = -125$ und $q = 3150$ liefert das gleiche Ergebnis.