Klausur – Aufgaben

HAMBURGER · FERN-HOCHSCHULE · HFH ·
UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

Studiengang	**Wirtschaftsingenieurwesen**
Fach	**Wirtschaftsmathematik**
Art der Leistung	**Studienleistung**
Klausur-Knz.	**WI-WMT-S12–030503**
Datum	**03.05.2003**

Bezüglich der Anfertigung Ihrer Arbeit sind folgende Hinweise verbindlich:

- Verwenden Sie ausschließlich das vom Aufsichtsführenden **zur Verfügung gestellte Papier**, und geben Sie sämtliches Papier (Lösungen, Schmierzettel und nicht gebrauchte Blätter) zum Schluss der Klausur wieder bei Ihrem Aufsichtsführenden ab. Eine nicht vollständig abgegebene Klausur gilt als nicht bestanden.
- Beschriften Sie jeden Bogen mit Ihrem **Namen und Ihrer Immatrikulationsnummer**. Lassen Sie bitte auf jeder Seite 1/3 ihrer Breite als Rand für Korrekturen frei, und nummerieren Sie die Seiten fortlaufend. Notieren Sie bei jeder Ihrer Antworten, auf welche Aufgabe bzw. Teilaufgabe sich diese bezieht.
- Die Lösungen und Lösungswege sind in einer für den Korrektanten **zweifelsfrei lesbaren Schrift** abzufassen. Korrekturen und Streichungen sind eindeutig vorzunehmen. Unleserliches wird nicht bewertet.
- Bei nummerisch zu lösenden Aufgaben ist außer der Lösung stets der **Lösungsweg anzugeben**, aus dem eindeutig hervorzugehen hat, wie die Lösung zustande gekommen ist.
- Zur Prüfung sind bis auf Schreib- und Zeichenutensilien ausschließlich die nachstehend genannten Hilfsmittel zugelassen. Werden **andere als die hier angegebenen Hilfsmittel verwendet oder Täuschungsversuche** festgestellt, gilt die Prüfung als nicht bestanden und wird mit der Note 5 bewertet.

Hilfsmittel :
HFH-Taschenrechner
Formelsammlung Wirtschaftsmathematik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Anzahl Aufgaben: - 8 -
Höchstpunktzahl: - 100 -

Vorläufiges Bewertungsschema:

Punktzahl		Ergebnis
von	bis einschl.	
50	100	**bestanden**
0	49,5	**nicht** bestanden

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 — 13 Punkte

Wie lautet die Gleichung einer Geraden, die

1.1 zur x-Achse parallel ist und durch den Punkt A (4, 2) geht? **3 Pkte**

1.2 zur y-Achse parallel ist und von Punkt B (0, 8) den Abstand 5 hat? **3 Pkte**

1.3 den Steigungswinkel 45° hat und durch den Punkt C (-1, 2) geht? **3 Pkte**

1.4 durch die Mitte der Strecke $\overline{PQ}$ mit P (3, 4) und Q (5, 6) geht und die Steigung 0,5 hat? **4 Pkte**

Aufgabe 2 — 12 Punkte

Bestimmen Sie k so, dass die Gleichung $x^2 + (k+1)\cdot x + 1 = 0$ genau eine Lösung hat.

Aufgabe 3 — 10 Punkte

Fassen Sie die Terme zusammen:

$$\frac{x^{m+2}}{x^{2m}} - \frac{x^0}{x^{m-2}} - \frac{x^{m+4}}{x^{2m+2}} + \frac{x^{-m}}{x^{-2}}; \quad x \neq 0.$$

Aufgabe 4 — 16 Punkte

Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{3}{x-2}$; $x \in \mathbf{R}$

4.1 Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich von $f(x)$. **2 Pkte**

4.2 Bestimmen Sie den Pol von $f(x)$. **2 Pkte**

4.3 Bestimmen Sie, falls vorhanden, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. **3 Pkte**

4.4 Was lässt sich über die Funktionswerte zu beiden Seiten des Pols sagen? **5 Pkte**
Liegt ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor?

4.5 Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ im Bereich $-4 \leq x \leq 8$. **4 Pkte**

Aufgabe 5 — 14 Punkte

Der Wert $\sqrt{2}$ soll auf 5 Stellen genau bestimmt werden. Wenden Sie hierzu das NEWTONsche Näherungsverfahren auf die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 2$ mit dem Startwert $x_0 = 1$ an.

Aufgabe 6 — 13 Punkte

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2 - 6x + 5$ und $g(x) = 2{,}5x - 10$ mit $D(f) = D(g) = \mathbf{R}$.

Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den Graphen beider Funktionen liegt.

Aufgabe 7 — 8 Punkte

Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion $f(u) = \ln \frac{u}{u+1}$.

Aufgabe 8 — 14 Punkte

Die Grenzkostenfunktion eines Unternehmens sei gegeben durch die Funktion

$$K'(x) = 0{,}62x^2 - 0{,}5x + 300 \; .$$

8.1 Berechnen Sie die Gesamtkostenfunktion $K(x)$, wobei die fixen Kosten 800 GE betragen. **6 Pkte**

8.2 Der Output wird von 20 auf 30 Einheiten gesteigert. Berechnen Sie die zusätzlich anfallenden Kosten. **8 Pkte**

HAMBURGER · FERN-HOCHSCHULE · HFH ·
UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

Korrekturrichtlinie zur Studienleistung
Wirtschaftsmathematik am 03.05.2003
Wirtschaftsingenieurwesen
WI-WMT-S12 – 030503

Für die Bewertung und Abgabe der Studienleistung sind folgende Hinweise verbindlich:

- Die Vergabe der Punkte nehmen Sie bitte so vor, wie in der Korrekturrichtlinie ausgewiesen. Eine summarische Angabe von Punkten für Aufgaben, die in der Korrekturrichtlinie detailliert bewertet worden sind, ist nicht gestattet.
- Nur dann, wenn die Punkte für eine Aufgabe nicht differenziert vorgegeben sind, ist ihre Aufschlüsselung auf die einzelnen Lösungsschritte Ihnen überlassen.
- Stoßen Sie bei Ihrer Korrektur auf einen anderen richtigen als den in der Korrekturrichtlinie angegebenen Lösungsweg, dann nehmen Sie bitte die Verteilung der Punkte sinngemäß zur Korrekturrichtlinie vor.
- Rechenfehler sollten grundsätzlich nur zur Abwertung des betreffenden Teilschrittes führen. Wurde mit einem falschen Zwischenergebnis richtig weitergerechnet, so erteilen Sie die hierfür vorgesehenen Punkte ohne weiteren Abzug.
- Ihre Korrekturhinweise und Punktbewertung nehmen Sie bitte in einer zweifelsfrei lesbaren Schrift vor.
- Die von Ihnen vergebenen Punkte und die daraus sich gemäß dem nachstehenden Notenschema ergebende Bewertung tragen Sie in den Klausur-Mantelbogen sowie in das Formular „Klausurergebnis“ (Ergebnisliste) ein.
- Gemäß der Diplomprüfungsordnung ist Ihrer Bewertung folgendes Bewertungsschema zugrunde zu legen:

Punktzahl		Ergebnis
von	bis einschl.	
50	100	**bestanden**
0	49,5	**nicht** bestanden

- Die korrigierten Arbeiten reichen Sie bitte spätestens bis zum

21. Mai 2003

in Ihrem Studienzentrum ein. Dies muss persönlich oder per Einschreiben erfolgen. Der angegebene Termin ist unbedingt einzuhalten. Sollte sich aus vorher nicht absehbaren Gründen ein Terminüberschreitung abzeichnen, so bitten wir Sie, dies unverzüglich Ihrem Studienzentrenleiter anzuzeigen.

Lösung 1 — vgl. SB 4; Kap. 4.1 — 13 Punkte

1.1 **3 Pkte**

Lineare Funktion: $f(x) = mx + b$

Parallel zur x-Achse: $m = 0 \quad \Rightarrow f(x) = b$ (1 Pkt)

Einsetzen von Punkt A (4, 2): $2 = b \quad \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 2}}$ (2 Pkte)

1.2 **3 Pkte**

Parallel zur y-Achse: $x = \text{konstant}$ (1 Pkt)

Von B (0, 8) Abstand 5: $\underline{\underline{x_1 = +5}}$; $\underline{\underline{x_2 = -5}}$ (2 Pkte)

1.3 **3 Pkte**

Lineare Funktion: $f(x) = mx + b$

Steigung 45°: $m = 1$ (1 Pkt)

Einsetzen von Punkt C (-1, 2): $2 = 1 \cdot (-1) + b \quad \Rightarrow b = 3$ und damit $\underline{\underline{f(x) = x + 3}}$ (2 Pkte)

1.4 **4 Pkte**

Mitte von $\overline{PQ}$ ergibt den Punkt (4, 5). (1 Pkt)

Steigung 0,5: $m = 0{,}5$ (1 Pkt)

Einsetzen in $f(x) = mx + b$: $5 = 0{,}5 \cdot 4 + b \quad \Rightarrow b = 3$ und damit $\underline{\underline{f(x) = 0{,}5x + 3}}$ (2 Pkte)

Lösung 2 — vgl. SB 1; Kap. 2.4.3 — 12 Punkte

$$x^2 + (k+1) \cdot x + 1 = 0$$

Anwendung der p,q-Formel mit $p = k + 1$ und $q = 1$ liefert (2 Pkte)

$$x_{1/2} = -\frac{k+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - 1}\,.$$ (4 Pkte)

Für $x_1 = x_2$ liegt genau eine Lösung vor. Mit $x_1 = x_2$ folgt $\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - 1 = 0$ (2 Pkte)

(Diskriminante D hat Wert Null)

$\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k+1}{2} = \pm 1$ (**Hinweis:** alternative Lösung über p,q-Formel) (2 Pkte)

Fall 1: $\frac{k+1}{2} = +1 \quad \Rightarrow \underline{\underline{k = 1}}$ (1 Pkt)

Fall 2: $\frac{k+1}{2} = -1 \quad \Rightarrow \underline{\underline{k = -3}}$ (1 Pkt)

Lösung 3 — vgl. SB 1; Kap. 2.3.6 und 2.3.7 — 10 Punkte

$$\frac{x^{m+2}}{x^{2m}} - \frac{x^{0}}{x^{m-2}} - \frac{x^{m+4}}{x^{2m+2}} + \frac{x^{-m}}{x^{-2}}; \quad x \neq 0$$

$\Leftrightarrow \quad x^{m+2-2m} - x^{0-m+2} - x^{m+4-2m-2} + x^{-m+2}$ (4 Pkte)

$\Leftrightarrow \quad x^{2-m} - x^{2-m} - x^{2-m} + x^{2-m}$ (4 Pkte)

$\Leftrightarrow \quad 0$ (2 Pkte)

Lösung 4 — vgl. SB 4; Kap. 3.4 und 4.3 — 16 Punkte

4.1

Definitionsbereich: $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ (2 Pkte)

4.2

Nullstelle des Nenners ergibt den Pol: $x = 2$ (2 Pkte)

4.3 **3 Pkte**

Schnittpunkte mit der x-Achse: keine (1 Pkt)

Schnittpunkte mit der y-Achse: Bedingung $x = 0 \Rightarrow f(0) = -1{,}5$ (2 Pkte)

4.4 **5 Pkte**

Für $x < 2$ gilt: $f(x) < 0$. Bei Annäherung von links an den Pol strebt $f(x) \to -\infty$ (2 Pkte)

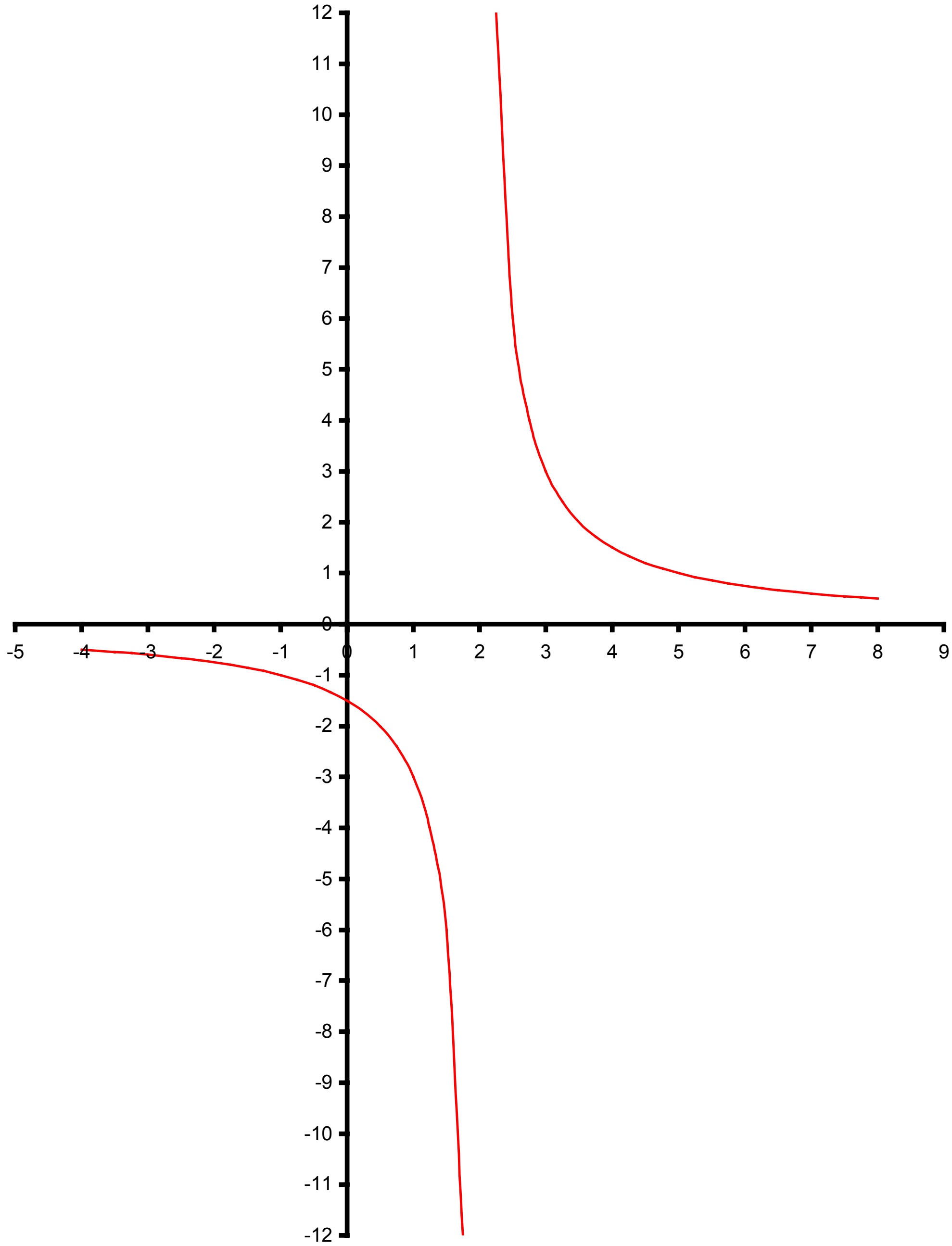
Für $x > 2$ gilt: $f(x) > 0$. Bei Annäherung von rechts an den Pol strebt $f(x) \to +\infty$ (2 Pkte)

Es liegt ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor. (1 Pkt)

4.5 Funktionsskizze: **4 Pkte**

(siehe Seite 3 der Korrekturrichtlinie)

4.5 Funktionsskizze: 4 Pkte



Lösung 5 vgl. SB 5; Kap. 4.6 14 Punkte

NEWTONsches Näherungsverfahren: $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

$f(x) = x^2 - 2$; $f'(x) = 2x$; Startwert: $x_0 = 1$

$n = 1: \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-1}{2} = 1{,}5$ (3 Pkte)

$n = 2: \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}5 - \frac{0{,}25}{3} = 1{,}416667$ (3 Pkte)

$n = 3: \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}416667 - \frac{0{,}006944}{2{,}833333} = 1{,}414216$ (3 Pkte)

$n = 4: \quad x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1{,}414216 - \frac{0{,}000006}{2{,}828431} = 1{,}414214$ (3 Pkte)

Da sich bei x_4 gegenüber x_3 die fünfte Nachkommastelle nicht mehr ändert, ist die Aufgabe erfüllt und die Iteration kann abgebrochen werden. (2 Pkte)

$\underline{\underline{1{,}41421}}$ gibt $\sqrt{2}$ auf fünf Nachkommastellen genau an.

Hinweis:

Die obige Berechnung wurde mit zwischengespeicherten Werten durchgeführt. Bei Rundung in den einzelnen Schritten ergeben sich geringfügig andere Werte.

Lösung 6 vgl. SB 7; Kap. 5.1.2 13 Punkte

Schnittpunkte der Funktionen durch Gleichsetzen.

$$x^2 - 6x + 5 = 2{,}5x - 10$$ (1 Pkt)

$$x^2 - \frac{17}{2}x + 15 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{17}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^2 - \frac{240}{16}}$$

$$x_{1/2} = \frac{17}{4} \pm \frac{7}{4}$$ (2 Pkte)

Schnittpunkte der Funktionen sind: $x_1 = 2{,}5$ und $x_2 = 6$. (2 Pkte)

Flächeninhalt:

$$A = \left| \int_{2,5}^{6} [f(x) - g(x)]\, dx \right|$$ (1 Pkt)

$$A = \left| \int_{2,5}^{6} \left[x^2 - 6x + 5 - (2,5x - 10)\right] dx \right|$$

$$A = \left| \int_{2,5}^{6} \left[x^2 - \frac{17}{2}x + 15\right] dx \right|$$ (auf die Zwischen-schritte max. 6 Pkte)

$$A = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{4}x^2 + 15x\right]_{2,5}^{6} \right|$$

$$A = \left| \frac{6^3}{3} - \frac{17}{4} \cdot 6^2 + 15 \cdot 6 - \left(\frac{2,5^3}{3} - \frac{17}{4} \cdot 2,5^2 + 15 \cdot 2,5\right) \right|$$

$$A = |9 - 16,146|$$

$$\underline{\underline{A = 7,146}}$$ (1 Pkt)

Der Flächeninhalt zwischen beiden Funktionen beträgt 7,146 FE.

Lösung 7 — vgl. SB 5; Kap. 3 — 8 Punkte

$$f(u) = \ln \frac{u}{u+1}$$

Anwendung der „Kettenregel", Ableitung der äußeren Funktion multipliziert mit Ableitung der inneren Funktion, Ableitung innere Funktion über Quotientenregel): (4 Pkte)

$$f'(u) = \frac{1}{\frac{u}{u+1}} \cdot \frac{1 \cdot (u+1) - u \cdot 1}{(u+1)^2} = \frac{u+1-u}{u \cdot (u+1)} = \underline{\underline{\frac{1}{u \cdot (u+1)}}}$$

Anwendung der Quotientenregel: (4 Pkte)

$$f''(u) = \frac{-1 \cdot (2u+1)}{(u \cdot (u+1))^2} = \underline{\underline{-\frac{2u+1}{u^2 \cdot (u+1)^2}}}$$

Lösung 8 — vgl. SB 7; Kap. 5.5.1 — 14 Punkte

8.1 Gesamtkostenfunktion **6 Pkte**

Die Gesamtkosten erhält man aus Gl. (5.5.1), vgl. Formelsammlung 20.7:

$$K(x) = K_v(x) + K_f = \int_0^x K'(z)\,dz + K(0) = \int_0^x (0{,}62z^2 - 0{,}5z + 300)\,dz + 800$$ (2 Pkte)

$$K(x) = \left[0{,}62\frac{z^3}{3} - 0{,}5\frac{z^2}{2} + 300z\right]_0^x + 800$$ (3 Pkte)

$$\underline{\underline{K(x) = 0{,}62\frac{x^3}{3} - 0{,}5\frac{x^2}{2} + 300x + 800}}$$ (1 Pkt)

8.2 Zusätzliche Kosten **8 Pkte**

Die zusätzlichen Kosten errechnen sich aus dem bestimmten Integral $\int_{20}^{30} K'(z)\,dz$:

$$\int_{20}^{30} (0{,}62z^2 - 0{,}5z + 300)\,dz$$ (2 Pkte)

$$= \left[0{,}62\frac{z^3}{3} - 0{,}5\frac{z^2}{2} + 300z\right]_{20}^{30}$$

$$= \left[0{,}62\frac{30^3}{3} - 0{,}5\frac{30^2}{2} + 300\cdot 30\right] - \left[0{,}62\frac{20^3}{3} - 0{,}5\frac{20^2}{2} + 300\cdot 20\right]$$

$$= 5.580 - 225 + 9.000 - (1.653{,}33 - 100 + 6.000)$$

(auf die Zwischenschritte max. 5 Pkte)

$$= 14.355 - 7.553{,}33$$

$$= \underline{\underline{6.801{,}67}}$$ (1 Pkt)

Die zusätzlichen Kosten betragen 6.801,67 GE.

Alternativ:

Bestimmung der Kosten für 20 und 30 Einheiten aus der Kostenfunktion von Teilaufgabe 8.1 $\left(K(x) = 0{,}62\frac{x^3}{3} - 0{,}5\frac{x^2}{2} + 300x + 800\right)$ und Differenzbildung:

$$K(30) - K(20) = 15.155 - 8.353{,}33 = 6.801{,}67 \text{ GE}$$