Klausur - Aufgaben

FFH · FERN-FACHHOCHSCHULE · HAMBURG

STAATLICH ANERKANNTE FACHHOCHSCHULE

Studiengang	**Wirtschaftsingenieurwesen**
Fach	**Wirtschaftsmathematik**
Art der Leistung	**Studienleistung**
Klausur-Knz.	**WI-WMT-S12–021102**
Datum	**02.11.2002**

Bezüglich der Anfertigung Ihrer Arbeit sind folgende Hinweise verbindlich:

- Verwenden Sie ausschließlich das vom Aufsichtsführenden **zur Verfügung gestellte Papier**, und geben Sie sämtliches Papier (Lösungen, Schmierzettel und nicht gebrauchte Blätter) zum Schluss der Klausur wieder bei Ihrem Aufsichtsführenden ab. Eine nicht vollständig abgegebene Klausur gilt als nicht bestanden.
- Beschriften Sie jeden Bogen mit Ihrem **Namen und Ihrer Immatrikulationsnummer**. Lassen Sie bitte auf jeder Seite 1/3 ihrer Breite als Rand für Korrekturen frei, und nummerieren Sie die Seiten fortlaufend. Notieren Sie bei jeder Ihrer Antworten, auf welche Aufgabe bzw. Teilaufgabe sich diese bezieht.
- Die Lösungen und Lösungswege sind in einer für den Korrektanten **zweifelsfrei lesbaren Schrift** abzufassen. Korrekturen und Streichungen sind eindeutig vorzunehmen. Unleserliches wird nicht bewertet.
- Bei nummerisch zu lösenden Aufgaben ist außer der Lösung stets der **Lösungsweg anzugeben**, aus dem eindeutig hervorzugehen hat, wie die Lösung zustande gekommen ist.
- Zur Prüfung sind bis auf Schreib- und Zeichenutensilien ausschließlich die nachstehend genannten Hilfsmittel zugelassen. Werden **andere als die hier angegebenen Hilfsmittel verwendet oder Täuschungsversuche** festgestellt, gilt die Prüfung als nicht bestanden und wird mit der Note 5 bewertet.

Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Anzahl Aufgaben:	- 8 -
Höchstpunktzahl:	- 100 -

Hilfsmittel :
FFH-Taschenrechner
Formelsammlung Wirtschaftsmathematik

Vorläufiges Bewertungsschema:

Punktzahl		**Ergebnis**
von	**bis einschl.**	
50	100	**bestanden**
0	49,5	**nicht** bestanden

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Lösen Sie die folgende Exponentialgleichung

$$3 \cdot 7^{x-1} + 8 = 5 \cdot 7^{x+1}.$$

Aufgabe 2 — 16 Punkte

Untersuchen sie, ob es eine Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^n \ (a, n \in \mathbf{R})$ mit der folgenden Wertetabelle gibt

x	1,8	2,7	3,1	5,9
$f(x)$	1,3	10	20	500

Bestimmen Sie gegebenenfalls a und n näherungsweise.

Aufgabe 3 — 8 Punkte

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(2, -1)$, $B(3, 0)$ und $C(-1, 4)$. Eine Gerade h geht durch A und teilt die Strecke $\overline{BC}$ in zwei gleichlange Abschnitte.

Bestimmen Sie die Gleichung von h in der allgemeinen Form $y = mx + b$.

Aufgabe 4 — 10 Punkte

Berechnen Sie die fünfte Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{b}{x^n} \ (b, n \in \mathbf{R})$.

Aufgabe 5 — 17 Punkte

Die Nullstelle der Gleichung $\frac{1}{x} + x^4 - 1 = 0$ soll mit dem NEWTON-Verfahren berechnet werden.

a) Wählen Sie als Startwert $x_0 = -1$ und weisen Sie dessen Eignung mit der entsprechenden Formel nach. **8 Pkte**

b) Berechnen Sie mit dem Startwert $x_0 = -1$ die erste und zweite Näherung der Nullstelle. **9 Pkte**

Aufgabe 6 — 12 Punkte

Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen der folgenden Funktionen *f* und *g* begrenzt wird:

$f(x) = x^2$; $g(x) = -x^3 + 3x^2$.

Aufgabe 7 — 11 Punkte

Der Graph der Funktion *f* mit $f(x) = 0{,}5 \cdot \mathrm{e}^{2x}$ begrenzt mit der *x*-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 0$ und $x = 2$ eine Fläche, die um die *x*-Achse rotiert.

Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

Aufgabe 8 — 16 Punkte

Für ein bestimmtes Produkt seien die Nachfragefunktion $p(x) = 12 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5x}$ und die Gleichgewichtsmenge $x_{\mathrm{M}} = 8\,\mathrm{ME}$ gegeben.

Berechnen Sie die Konsumentenrente.

Korrekturrichtlinie

FFH · FERN-FACHHOCHSCHULE · HAMBURG
STAATLICH ANERKANNTE FACHHOCHSCHULE

Korrekturrichtlinie zur Studienleistung
Wirtschaftsmathematik am 02.11.2002
Wirtschaftsingenieurwesen
WI-WMT-S12 – 021102

Für die Bewertung und Abgabe der Studienleistung sind folgende Hinweise verbindlich:

- Die Vergabe der Punkte nehmen Sie bitte so vor, wie in der Korrekturrichtlinie ausgewiesen. Eine summarische Angabe von Punkten für Aufgaben, die in der Korrekturrichtlinie detailliert bewertet worden sind, ist nicht gestattet.
- Nur dann, wenn die Punkte für eine Aufgabe nicht differenziert vorgegeben sind, ist ihre Aufschlüsselung auf die einzelnen Lösungsschritte Ihnen überlassen.
- Stoßen Sie bei Ihrer Korrektur auf einen anderen richtigen als den in der Korrekturrichtlinie angegebenen Lösungsweg, dann nehmen Sie bitte die Verteilung der Punkte sinngemäß zur Korrekturrichtlinie vor.
- Rechenfehler sollten grundsätzlich nur zur Abwertung des betreffenden Teilschrittes führen. Wurde mit einem falschen Zwischenergebnis richtig weitergerechnet, so erteilen Sie die hierfür vorgesehenen Punkte ohne weiteren Abzug.
- Ihre Korrekturhinweise und Punktbewertung nehmen Sie bitte in einer zweifelsfrei lesbaren Schrift vor.
- Die von Ihnen vergebenen Punkte und die daraus sich gemäß dem nachstehenden Notenschema ergebende Bewertung tragen Sie in den Klausur-Mantelbogen sowie in das Formular „Klausurergebnis" (Ergebnisliste) ein.
- Gemäß der Diplomprüfungsordnung ist Ihrer Bewertung folgendes Bewertungsschema zugrunde zu legen:

Punktzahl		Ergebnis
von	bis einschl.	
50	100	**bestanden**
0	49,5	**nicht** bestanden

- Die korrigierten Arbeiten reichen Sie bitte spätestens bis zum

20. November 2002

in Ihrem Studienzentrum ein. Dies muss persönlich oder per Einschreiben erfolgen. Der angegebene Termin ist unbedingt einzuhalten. Sollte sich aus vorher nicht absehbaren Gründen ein Terminüberschreitung abzeichnen, so bitten wir Sie, dies unverzüglich Ihrem Studienzentrenleiter anzuzeigen.

Lösung 1 — vgl. SB 1; Kap. 2.4.6 — 10 Punkte

Gleichung entsprechend den Logarithmenregeln umformen:

$$3 \cdot 7^{x-1} + 8 = 5 \cdot 7^{x+1}$$

$$3 \cdot \frac{1}{7} \cdot 7^x + 8 = 5 \cdot 7 \cdot 7^x \qquad | \cdot 7$$ (2 Pkte)

$$3 \cdot 7^x + 56 = 245 \cdot 7^x \qquad | -\left(3 \cdot 7^x\right)$$ (2 Pkte)

$$56 = 242 \cdot 7^x \qquad | : 2 \text{ , logarithmieren}$$ (2 Pkte)

$$\log \frac{28}{121} = x \cdot \log 7 \qquad |: \log 7$$ (2 Pkte)

$$x = \frac{\log \frac{28}{121}}{\log 7} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = -0{,}7521}}$$ (2 Pkte)

Lösung 2 — vgl. SB 1; Kap. 2.4.6 und SB 4; Kap. 4.2 — 16 Punkte

Aus $f(1{,}8) = 1{,}3$ folgt $a \cdot 1{,}8^b = 1{,}3$ (I) (2 Pkte)

Aus $f(2{,}7) = 10$ folgt $a \cdot 2{,}7^b = 10$ (II) (2 Pkte)

Aus (I) ergibt sich $a = \frac{1{,}3}{1{,}8^b}$ (Ia) (1 Pkt)

Einsetzen in (II) ergibt: $\frac{1{,}3}{1{,}8^b} \cdot 2{,}7^b = 10$

$$\left(\frac{2{,}7}{1{,}8}\right)^b = \frac{10}{1{,}3} \text{ bzw. } 1{,}5^b = 7{,}6923$$ (3 Pkte)

Gleichung logarithmieren zu einer beliebigen Basis und auflösen nach *b*:

$$b = \frac{\log 7{,}6923}{\log 1{,}5} \approx 5$$ (2 Pkte)

Einsetzen in (Ia) ergibt: $a = \frac{1{,}3}{1{,}8^5} \approx 0{,}07$ (2 Pkte)

Die beiden ersten Wertepaare liefern damit näherungsweise $\underline{\underline{f(x) = 0{,}07 \cdot x^5}}$ (2 Pkte)

Punktprobe mit den restlichen Wertepaaren:

$$f(3,1) = 0{,}07 \cdot 3{,}1^5 \approx 20 \text{ bzw. } f(5,9) = 0{,}07 \cdot 5{,}9^5 \approx 500$$ (2 Pkte)

Dies bestätigt, dass *f* näherungsweise obige Wertetabelle besitzt.

Lösung 3 vgl. SB 1; Kap. 4.1 8 Punkte

Die Gerade h geht durch A und die „Mitte“ M von $\overline{BC}$.

<u>Bestimmung</u> von $M(x_M, y_M)$:

2-Punkteform einer Geraden: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ (1 Pkt)

Einsetzen von $B(3, 0)$ und $C(-1, 4)$ ergibt

$$\frac{4-0}{(-1)-3} = \frac{y-4}{x-3} \quad \Rightarrow \quad -1 = \frac{y}{x-3} \quad \Rightarrow \quad y = -x+3$$ (2 Pkte)

Mit $x_M = 1$ (folgt durch Überlegung oder aus $x_M = x_C + |x_C - x_B| / 2$) ergibt sich (1 Pkt)

$$y_M = -x_M + 3 = 2 .$$ (1 Pkt)

<u>Bestimmung von *h*:</u>

2-Punkteform einer Geraden: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

Einsetzen von $A(2, -1)$ und $M(1, 2)$ ergibt

$$\frac{2-(-1)}{1-2} = \frac{y-(-1)}{x-2} \quad \Rightarrow \quad -3 = \frac{y+1}{x-2}$$ (2 Pkte)

Umstellen nach y liefert die gesuchte Geradengleichung: $\underline{\underline{y = -3x+5}}$ (1 Pkt)

Lösung 4 vgl. SB 5; Kap. 2 und 3 10 Punkte

$f(x) = \frac{b}{x^n}$ bzw. $f(x) = b \cdot x^{-n}$

$$f'(x) = -bn \cdot x^{-n-1}$$ (2 Pkte)

$$f''(x) = -bn(-n-1) \cdot x^{-n-2}$$ (2 Pkte)

$$f'''(x) = -bn(-n-1)(-n-2) \cdot x^{-n-3}$$ (2 Pkte)

Das Gesetz der Ableitungen ist ersichtlich. Für die fünfte Ableitung ergibt sich:

$$f^{(5)}(x) = -bn(-n-1)(-n-2)(-n-3)(-n-4) \cdot x^{-n-5}$$

$$\underline{\underline{f^{(5)}(x) = \frac{-bn(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{x^{n+5}}}}.$$ (4 Pkte)

Lösung 5	**vgl. SB 5; Kap. 4.6**	**17 Punkte**

a) Eignung des Startwertes **8 Pkte**

Für einen Startwert x_0 muss gelten $\left|\frac{f(x_0)\cdot f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}\right| < 1$ (I) (1 Pkt)

Funktion: $f(x) = \frac{1}{x} + x^4 - 1$

Ableitungen: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 4x^3$; $f''(x) = \frac{2}{x^3} + 12x^2$ (2 Pkte)

Einsetzen des Startwerts $x_0 = -1$ in die Funktion und ihre Ableitungen ergibt

$f(-1) = -1$; $f'(-1) = -5$; $f''(-1) = 10$ (3 Pkte)

Einsetzen in (I): $\left|\frac{-1\cdot 10}{(-5)^2}\right| = 0{,}4 < 1$ (2 Pkte)

Damit ist der Nachweis der Eignung des Startwerts erbracht.

b) Anwendung des NEWTON-Verfahrens **9 Pkte**

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$ (1 Pkt)

$n = 1$: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{-1}{-5} = -1{,}2$ (3 Pkte)

$n = 2$: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1{,}2 - \frac{0{,}24026}{-7{,}60644} = -1{,}16841$ (5 Pkte)

Lösung 6	**vgl. SB 7; Kap. 5.1**	**12 Punkte**

Schnittpunkte der Graphen durch Gleichsetzen bestimmen:

$x^2 = -x^3 + 3x^2$ (1 Pkt)

$x^3 - 2x^2 = 0$ (1 Pkt)

$x^2(x-2) = 0$ mit den Schnittpunkten $x_{1,2} = 0$; $x_3 = 2$ (2 Pkte)

Flächeninhalt:

$$A = \left| \int_0^2 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x \right|$$ (1 Pkt)

$$= \left| \int_0^2 \left[x^2 - \left(-x^3 + 3x^2\right)\right]\mathrm{d}x \right|$$ (1 Pkt)

$$= \left| \int_0^2 \left[x^3 - 2x^2\right]\mathrm{d}x \right|$$ (2 Pkte)

$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 \right|$$ (2 Pkte)

$$= \left| 4 - \frac{16}{3} \right|$$ (1 Pkt)

$$\underline{\underline{A = \frac{4}{3}}}$$ (1 Pkt)

Der Flächeninhalt zwischen den Schaubildern von *f* und *g* beträgt $\frac{4}{3}$ FE.

Lösung 7 — vgl. SB 7; Kap. 5.2 — 11 Punkte

Nach [SB 11, 20.5] gilt für das Volumen einer Fläche, die um die *x*-Achse rotiert

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x, \text{ für } a < b.$$ (2 Pkte)

Mit der Funktion $f(x) = 0{,}5 \cdot \mathrm{e}^{2x}$ und den Integrationsgrenzen $a = 0$ und $b = 2$ ergibt sich

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)^2\,\mathrm{d}x$$ (2 Pkte)

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^2 \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x$$ (2 Pkte)

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{4x}\right]_0^2$$ (2 Pkte)

$$= \frac{\pi}{16}\left[\mathrm{e}^8 - 1\right] = \underline{\underline{585{,}11}}$$ (3 Pkte)

Das Volumen des Rotationskörpers beträgt 585,11 VE.

Lösung 8 vgl. SB 4; Kap. 5.5.2 16 Punkte

Nach [SB 11, 20.7] gilt für die Konsumentenrente $K = \int_0^{x_M} p(x)\,dx - p_M \cdot x_M$ (2 Pkte)

Aus der Aufgabenstellung folgt $x_M = 8$ ME; $p(x) = 12 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ und $p_M = p(8)$. (2 Pkte)

Einsetzen liefert

$$K = \int_0^8 \left(12 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx - 12 \cdot e^{-4} \cdot 8$$

$$= 12 \cdot \int_0^8 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx - 96 \cdot e^{-4} \qquad \text{(I)}$$ (4 Pkte)

Berechnung des Integrals $\int_0^8 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$:

Substitution $z = -\frac{1}{2}x$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dx = -2dz$ (2 Pkte)

Grenzen $x = 0 \Rightarrow z = 0$ (1 Pkt)

$x = 8 \Rightarrow z = -4$ (1 Pkt)

Damit ergibt sich

$$\int_0^8 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = -2\int_0^{-4} e^z\,dz = -2\left[e^z\right]_0^{-4} = -2\left[e^{-4} - e^0\right] = 1{,}963$$ (2 Pkte)

Einsetzen in (I) ergibt $K = 12 \cdot 1{,}963 - \frac{96}{e^4} = \underline{\underline{21{,}798 \text{ GE}}}$ (2 Pkte)

Die Konsumentenrente beträgt 21,798 GE.