Klausur - Aufgaben

FFH · FERN-FACHHOCHSCHULE · HAMBURG

STAATLICH ANERKANNTE FACHHOCHSCHULE

Studiengang	**Betriebswirtschaft**
Fach	**Wirtschaftsmathematik**
Art der Leistung	**Studienleistung**
Klausur-Knz.	**BW-WMT-S12–021102**
Datum	**02.11.2002**

Bezüglich der Anfertigung Ihrer Arbeit sind folgende Hinweise verbindlich:

- Verwenden Sie ausschließlich das vom Aufsichtsführenden **zur Verfügung gestellte Papier**, und geben Sie sämtliches Papier (Lösungen, Schmierzettel und nicht gebrauchte Blätter) zum Schluss der Klausur wieder bei Ihrem Aufsichtsführenden ab. Eine nicht vollständig abgegebene Klausur gilt als nicht bestanden.
- Beschriften Sie jeden Bogen mit Ihrem **Namen und Ihrer Immatrikulationsnummer**. Lassen Sie bitte auf jeder Seite 1/3 ihrer Breite als Rand für Korrekturen frei, und nummerieren Sie die Seiten fortlaufend. Notieren Sie bei jeder Ihrer Antworten, auf welche Aufgabe bzw. Teilaufgabe sich diese bezieht.
- Die Lösungen und Lösungswege sind in einer für den Korrektanten **zweifelsfrei lesbaren Schrift** abzufassen. Korrekturen und Streichungen sind eindeutig vorzunehmen. Unleserliches wird nicht bewertet.
- Bei nummerisch zu lösenden Aufgaben ist außer der Lösung stets der **Lösungsweg anzugeben**, aus dem eindeutig hervorzugehen hat, wie die Lösung zustande gekommen ist.
- Zur Prüfung sind bis auf Schreib- und Zeichenutensilien ausschließlich die nachstehend genannten Hilfsmittel zugelassen. Werden **andere als die hier angegebenen Hilfsmittel verwendet oder Täuschungsversuche** festgestellt, gilt die Prüfung als nicht bestanden und wird mit der Note 5 bewertet.

Hilfsmittel :
FFH-Taschenrechner
Formelsammlung Wirtschaftsmathematik

Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Anzahl Aufgaben:	- 8 -
Höchstpunktzahl:	- 100 -

Vorläufiges Bewertungsschema:

Punktzahl		Ergebnis
von	bis einschl.	
50	100	**bestanden**
0	49,5	**nicht** bestanden

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Lösen Sie die folgende Exponentialgleichung

$$3^{x+2} + 3^{x} = 15 .$$

Aufgabe 2 — 16 Punkte

Untersuchen sie, ob es eine Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^{n}$ $(a, n \in \mathbf{R})$ mit der folgenden Wertetabelle gibt

x	3,5	4,9	6,5	8,0
$f(x)$	6,0	23,1	71,4	163,8

Bestimmen Sie gegebenenfalls a und n näherungsweise.

Aufgabe 3 — 10 Punkte

Die Einnahmen und Ausgaben einer Firma lassen sich näherungsweise durch folgende Funktionen beschreiben:

Einnahmen $E(t) = 370 - 8{,}9t$

Ausgaben $A(t) = 435 - 54{,}4t + 6{,}5t^{2}$, mit t – Anzahl der Jahre seit 2000.

Bestimmen Sie die Zeitpunkte (Jahre), bei denen Einnahmen und Ausgaben gleich groß sind.

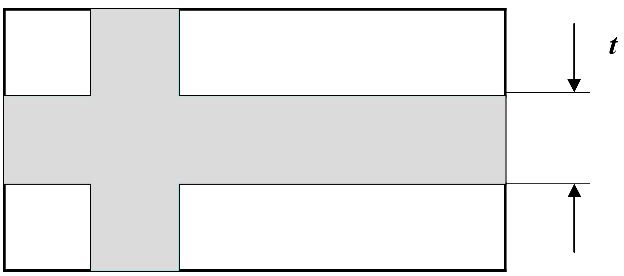
Aufgabe 4 — 16 Punkte

Eine 6 m breite und 8 m lange Fahne soll mit einem grünen Kreuz gleicher Streifenbreite versehen werden (siehe Bild).

a) Berechnen Sie die Breite t der grünen Streifen, wenn das Kreuz denselben Flächeninhalt haben soll wie die restliche Fläche. **8 Pkte**

b) Berechnen Sie die Streifenbreite t in Abhängigkeit von der Länge a und der Breite b der Fahne. **8 Pkte**

(Diese Aufgabe wurde nachträglich aus der Bewertung genommen.)



Aufgabe 5 — 16 Punkte

Für ein bestimmtes Produkt liegen folgende Schätzungen der Preis-Absatzfunktion und Gesamtkostenfunktion vor:

Preis-Absatzfunktion $p(x) = 3x + 42$

Gesamtkostenfunktion $K(x) = 2x^2 + 182x - 4500$

Berechnen Sie die

a) Umsatzfunktion **4 Pkte**

b) Gewinnschwellen **6 Pkte**

c) Funktion des Deckungsbeitrags. **6 Pkte**

Aufgabe 6 — 13 Punkte

Herr Gerber bietet seinen Bugatti zum Verkauf. Nach kurzer Zeit liegen zwei Angebote vor:

Angebot I: 100.000 € sofort, Rest in 12 nachschüssigen Jahresraten zu je 10.000 €.

Angebot II: 185.000 € nach einem Jahr.

Zu welchem Angebot raten Sie Herrn Gerber bei einem Zinssatz von 8,0 % p.a.?

Aufgabe 7 — 13 Punkte

Frau Weber leistet sich eine Einbauküche in Höhe von 9.000 €. Bei einem Zinssatz von 8,5 % p.a. möchte sie den Kredit über eine Ratentilgung jährlich mit 12 % der Anfangsschuld tilgen.

Berechnen Sie

a) die Tilgungsrate des letzten Rückzahlungsjahres **7 Pkte**

b) die Annuität des letzten Rückzahlungsjahres. **6 Pkte**

Aufgabe 8 — 6 Punkte

Frau Dressler legt 55.000 € bei ihrer Bank zu 6,5 % Zinsen an. Sie möchte diesem Konto jeweils zum Jahresanfang 15 Jahre lang einen gleich hohen Betrag entnehmen.

Berechnen Sie bei übereinstimmender Renten- und Zinsperiode diese jährliche Rate, wenn mit der 15-ten Auszahlung das gesamte Anfangskapital verbraucht wird.

FFH • FERN-FACHHOCHSCHULE • HAMBURG
STAATLICH ANERKANNTE FACHHOCHSCHULE

Korrekturrichtlinie zur Studienleistung
Wirtschaftsmathematik am 02.11.2002
Betriebswirtschaft
BW-WMT-S12 – 021102

Für die Bewertung und Abgabe der Studienleistung sind folgende Hinweise verbindlich:

- Die Vergabe der Punkte nehmen Sie bitte so vor, wie in der Korrekturrichtlinie ausgewiesen. Eine summarische Angabe von Punkten für Aufgaben, die in der Korrekturrichtlinie detailliert bewertet worden sind, ist nicht gestattet.
- Nur dann, wenn die Punkte für eine Aufgabe nicht differenziert vorgegeben sind, ist ihre Aufschlüsselung auf die einzelnen Lösungsschritte Ihnen überlassen.
- Stoßen Sie bei Ihrer Korrektur auf einen anderen richtigen als den in der Korrekturrichtlinie angegebenen Lösungsweg, dann nehmen Sie bitte die Verteilung der Punkte sinngemäß zur Korrekturrichtlinie vor.
- Rechenfehler sollten grundsätzlich nur zur Abwertung des betreffenden Teilschrittes führen. Wurde mit einem falschen Zwischenergebnis richtig weitergerechnet, so erteilen Sie die hierfür vorgesehenen Punkte ohne weiteren Abzug.
- Ihre Korrekturhinweise und Punktbewertung nehmen Sie bitte in einer zweifelsfrei lesbaren Schrift vor.
- Die von Ihnen vergebenen Punkte und die daraus sich gemäß dem nachstehenden Notenschema ergebende Bewertung tragen Sie in den Klausur-Mantelbogen sowie in das Formular „Klausurergebnis“ (Ergebnisliste) ein.
- Gemäß der Diplomprüfungsordnung ist Ihrer Bewertung folgendes Bewertungsschema zugrunde zu legen:

Punktzahl		Ergebnis
von	**bis einschl.**	
50	100	**bestanden**
0	49,5	**nicht** bestanden

- Die korrigierten Arbeiten reichen Sie bitte spätestens bis zum

20. November 2002

in Ihrem Studienzentrum ein. Dies muss persönlich oder per Einschreiben erfolgen. Der angegebene Termin ist unbedingt einzuhalten. Sollte sich aus vorher nicht absehbaren Gründen ein Terminüberschreitung abzeichnen, so bitten wir Sie, dies unverzüglich Ihrem Studienzentrenleiter anzuzeigen.

Lösung 1 — vgl. SB 1; Kap. 2.4.6 — 10 Punkte

Gleichung entsprechend den Logarithmenregeln umformen:

$$3^{x+2} + 3^x = 15$$

$$9 \cdot 3^x + 3^x = 15$$ (2 Pkte)

$$10 \cdot 3^x = 15$$ (2 Pkte)

$$3^x = \frac{3}{2} \qquad | \text{ logarithmieren}$$ (2 Pkte)

$$x \cdot \log 3 = \log \frac{3}{2} \qquad | : \log 3$$ (2 Pkte)

$$x = \frac{\log \frac{3}{2}}{\log 3} = \underline{\underline{0{,}3691}}$$ (2 Pkte)

Lösung 2 — vgl. SB 1; Kap. 2.4.6 und SB 4; Kap. 4.2 — 16 Punkte

Aus $f(3{,}5) = 6{,}0$ folgt $a \cdot 3{,}5^n = 6{,}0$ (I) (2 Pkte)

Aus $f(4{,}9) = 23{,}1$ folgt $a \cdot 4{,}9^n = 23{,}1$ (II) (2 Pkte)

Aus (I) ergibt sich: $a = \frac{6}{3{,}5^n}$ (III) (1 Pkt)

Einsetzen von (III) in (II) liefert

$$\frac{6}{3{,}5^n} \cdot 4{,}9^n = 23{,}1$$

$$\left(\frac{4{,}9}{3{,}5}\right)^n = \frac{23{,}1}{6} \text{ bzw. } 1{,}4^n = 3{,}85 .$$ (3 Pkte)

Gleichung logarithmieren zu einer beliebigen Basis und Auflösen nach *n:*

$$n = \frac{\log 3{,}85}{\log 1{,}4} \approx 4{,}0 .$$ (2 Pkte)

Einsetzen in (III) ergibt: $a = \frac{6}{3{,}5^4} \approx 0{,}04$. (2 Pkte)

Die beiden ersten Wertepaare liefern damit näherungsweise $\underline{\underline{f(x) = 0{,}04 \cdot x^4}}$. (2 Pkte)

Punktprobe mit den restlichen Wertepaaren:

$$f(6{,}5) = 0{,}04 \cdot 6{,}5^4 \approx 71{,}4 \text{ bzw. } f(8{,}0) = 0{,}04 \cdot 8{,}0^4 \approx 163{,}8$$ (2 Pkte)

Dies bestätigt, dass *f* näherungsweise obige Wertetabelle besitzt.

Lösung 3 vgl. SB 1; Kap. 2.4.3 10 Punkte

Für die Zeitpunkte, bei denen Einnahmen und Ausgaben gleich groß sind, muss gelten:

$E(t) = A(t)$. (2 Pkte)

Einsetzen von $E(t)$ und $A(t)$ liefert:

$370 - 8{,}9t = 435 - 54{,}4t + 6{,}5t^2$. (2 Pkte)

Umformen zu einer quadratischen Gleichung:

$6{,}5t^2 - 45{,}5t + 65 = 0 \quad | : 6{,}5$ (2 Pkte)

$t^2 - 7t + 10 = 0$

$(t-2)(t-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 2 \; ; \; t_2 = 5$ (2 Pkte)

Damit sind die gesuchten Zeitpunkte $2000 + t_1 = \underline{\underline{2002}}$ (1 Pkt)

$2000 + t_2 = \underline{\underline{2005}}$ (1 Pkt)

Lösung 4 vgl. SB 1; Kap. 2.4.3 und SB 4 16 Punkte

a) Streifenbreite **8 Pkte**

Die Streifenbreite wird mit x Meter angenommen. Damit gilt für den Flächeninhalt A_K des Kreuzes

$A_K = \left(6 \cdot x + 8 \cdot x - x^2\right) \text{m}^2$. (2 Pkte)

Das Doppelte dieses Flächeninhalts entspricht der Gesamtfläche der Fahne

$2A_K = 48 \text{ m}^2 \quad$ (I) (2 Pkte)

Einsetzen der Formel von A_K liefert

$2\left(6x + 8x - x^2\right) = 48 \quad$ (II)

$x^2 - 14x + 24 = 0$ (2 Pkte)

$(x-2)(x-12) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 2}} \; ; \; x_2 = 12$ (nicht sinnvoll !!) (2 Pkte)

Die Breite des grünen Streifens beträgt demnach 2 Meter.

b) Allgemeine Lösung **8 Pkte**

Ersetzt man in (II) 8 m $\to a$, 6 m $\to b$, $x \to t$, so ergibt sich

$$2\left(b \cdot t + a \cdot t - t^2\right) = ab \,.$$ (2 Pkte)

Umformung liefert

$$t^2 - (a+b)t + \frac{ab}{2} = 0$$ (2 Pkte)

$$t_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{2ab}{4}}$$

$$t_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$ (2 Pkte)

Das positive Vorzeichen ist nicht sinnvoll (mögliche Größenordnung). Für die Streifenbreite t gilt demnach

$$\underline{\underline{t = \frac{1}{2}\left(a + b - \sqrt{a^2+b^2}\right)}}$$ (2 Pkte)

Lösung 5 vgl. SB 4; Kap. 5 16 Punkte

a) Umsatzfunktion **4 Pkte**

Die Umsatzfunktion $E(x)$ ergibt sich als das Produkt von Preis-Absatzfunktion $p(x)$ und abgesetzter Menge x

$$E(x) = p(x) \cdot x$$ (2 Pkte)

$$= (3x + 42) \cdot x$$

$$= \underline{\underline{3x^2 + 42x}}$$ (2 Pkte)

b) Gewinnschwellen **6 Pkte**

Die Gewinnschwellen erhält man als positive Nullstellen der Gewinnfunktion, wobei die Gewinnfunktion $G(x)$ sich als Differenz von Umsatzfunktion $E(x)$ und Gesamtkostenfunktion $K(x)$ errechnet:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$ (2 Pkte)

$$= 3x^2 + 42x - \left(2x^2 + 182x - 4500\right)$$

$$= x^2 - 140x + 4500 \qquad \text{(I)}$$ (1 Pkt)

$$G(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 140x + 4500 = 0$$ (1 Pkt)

Dies lässt sich auch als Produkt schreiben: $(x-50)(x-90) = 0.$

Die Nullstellen bzw. Gewinnschwellen sind $\underline{\underline{x_1 = 50}}$; $\underline{\underline{x_2 = 90}}$. (2 Pkte)

c) Deckungsbeitrag **6 Pkte**

Der Deckungsbeitrag $D(x)$ errechnet sich als Differenz von Umsatz $E(x)$ und variablen Kosten $K_v(x)$.

$$D(x) = E(x) - K_v(x) \qquad \text{(2 Pkte)}$$

$$= E(x) - [K(x) - K(0)]$$

$$= E(x) - K(x) + K(0) \qquad \text{mit } K(0) = -4500 \qquad \text{(2 Pkte)}$$

Unter Berücksichtigung von (I) aus Teilaufgabe a) beträgt die Funktion des Deckungsbeitrags

$$\underline{\underline{D(x) = x^2 - 140x}} \qquad \text{(2 Pkte)}$$

Lösung 6 vgl. SB 2; Kap. 3.2 13 Punkte

Es sind die Barwerte der beiden Angebote gesucht.

Angebot I:

Der Barwert errechnet sich als Summe aus den 100.000 € plus dem nachschüssigen Rentenbarwert R_0 nach [SB 2, 3-2]:

$$R_0 = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ (siehe auch SB 11, Pkt. 9.1).} \qquad \text{(3 Pkte)}$$

Einsetzen von $r = 10.000$ € ; $q = 1{,}08$ und $n = 12$ ergibt

$$R_0 = \frac{10.000}{1{,}08^{12}} \cdot \frac{1{,}08^{12} - 1}{1{,}08 - 1} \text{ €}$$

$$R_0 = 75.360{,}78 \text{ €} \qquad \text{(2 Pkte)}$$

Der Barwert für Angebot I beträgt 100.000 € + 75.360,78 € = <u>175.360,78 €.</u> (2 Pkte)

Angebot II:

Der Barwert errechnet sich aus dem nachschüssigen Rentenbarwert R_0:

$$R_0 = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \qquad \text{(3 Pkte)}$$

Einsetzen von $r = 185.000$ € ; $q = 1{,}08$ und $n = 1$ ergibt:

$$R_0 = \frac{185.000}{1{,}08} \cdot \frac{1{,}08 - 1}{1{,}08 - 1} \text{ €}$$

$$R_0 = 171.296{,}30 \text{ €.} \qquad \text{(2 Pkte)}$$

Der Barwert für das Angebot B beträgt <u>171.296,30 €.</u>

Der Vergleich beider Angebote zeigt, dass Angebot I günstiger ist. (1 Pkt)

Lösung 7 vgl. SB 3; Kap. 2.2 13 Punkte

a) Tilgungsrate **7 Pkte**

Der Tilgungszeitraum errechnet sich aus $\frac{100}{12} = 8{,}3\overline{3} \quad \Rightarrow \quad n^* = 8$ (2 Pkte)

Die Schuld ist demnach nach 9 Jahren zurückgezahlt. (1 Pkt)

Nach [SB 3, 2-7] gilt für die Tilgungsrate des letzten Rückzahlungsjahres

$$T_r = S - n^* \cdot T \text{ , mit } T = \frac{p_S}{100} \cdot S \; (p_S = 12\,\%)$$ (2 Pkte)

Einsetzen von $S = 9.000$ € ; $n^* = 8$; $r = 9$ und $T = 0{,}12 \cdot 9.000€ = 1080$ € ergibt

$$T_9 = (9.000 - 8 \cdot 1080) \text{ €} = 360 \text{ €}.$$ (2 Pkte)

Die Tilgungsrate des neunten Jahres beträgt <u>360 €</u>.

b) Annuität **6 Pkte**

Nach [SB 3, 2-8] errechnet sich die Annuität des letzten Rückzahlungsjahres aus

$$A_9 = Z_9 + T_9,$$ (2 Pkte)

mit den zu zahlenden Zinsen im neunten Jahr

$$Z_9 = T_9 \cdot i \text{ , Zinssatz } i = 0{,}085$$

$$Z_9 = 360\text{€} \cdot 0{,}085 = 30{,}60 \text{ €}.$$ (2 Pkte)

Mit den Zinsen von 30,60 € und der Tilgungsrate von 360 € beträgt die Annuität, die am Ende des neunten Jahres fällig wird, <u>390,60 €.</u> (2 Pkte)

Lösung 8 vgl. SB 2; Kap. 3.3 6 Punkte

Nach [SB 2, 3-14] gilt für die vorschüssige Rentenrate bei bekanntem Rentenbarwert

$$r = \frac{\overline{R}_0 \cdot q^{n-1}(q-1)}{q^n - 1} \text{ (vgl. SB 11, Pkt 9.2).}$$ (3 Pkte)

Einsetzen von $\overline{R}_0 = 55.000$ € ; $n = 15$ und $g = 1{,}065$ ergibt:

$$r = \frac{55.000 \cdot 1{,}065^{15-1}(1{,}065 - 1)}{1{,}065^{15} - 1} \text{ €}$$ (2 Pkte)

$$r = 5.492{,}40 \text{ €}.$$ (1 Pkt)

Die jährliche Rate beträgt <u>5.492,40 €</u>.